

W. B o g u s z e w s k i,
Leokadia U b y s z - B o r u c k a (Warszawa),
Maria U l i ń s k a (Puławy), Aleksander R. W ó j c i k (Warszawa)

BADANIE EFEKTYWNOŚCI NAWOŻENIA MINERALNEGO N P K W DOŚWIAD-
CZENIACH WIELOKROTNYCH ZA POMOCĄ WIELOKROTNEJ ANALIZY REGRESJI

Efektywność nawożenia mineralnego zdefiniujemy jako oczekiwany przyrost plonu nasion, bulw czy zielonej masy rośliny, pod którą stosuje się to nawożenie, obliczony na 1 kg czystego składnika. Tak określona efektywność nawożenia mineralnego ma sens dla każdej konkretnej rośliny uprawnej i będzie odmienna dla różnych roślin. Z gospodarczego punktu widzenia największe znaczenie ma nawożenie mineralne trójskładnikowe NPK - ściślej N, P₂O₅ i K₂O. Dla wyznaczenia efektywności każdego ze składników przy różnych dawkach niezbędna jest znajomość powierzchni regresji plonu Y w zależności od trzech składników nawożenia

(1) $Y = f(z_1, z_2, z_3)$ gdzie $z_1 = N$, $z_2 = P_2O_5$, $z_3 = K_2O$
lub jej oszacowania. Przyjmuje się jako fakt empiryczny, że funkcja regresji $f(z_1, z_2, z_3)$ nie jest liniowa. Wiadomo również, że działanie paru składników nawozowych może się wzajemnie limitować, tzn. mogą występować ich współdziałania.

Efektywność pierwszego składnika z_1 przy wzroście jego dawki od a do b wynosi

$$(2) \quad \dot{Y}_{z_1 \in \langle a, b \rangle} = \frac{f(b, z_2, z_3) - f(a, z_2, z_3)}{b - a}$$

gdzie zmiennym z_2 i z_3 powinny być nadane pewne stałe wartości c_2 i c_3 . Jest to efektywność średnia składnika z_1 w przedziale $\langle a, b \rangle$. Przechodząc do granicy, gdy $b \rightarrow a$, otrzymamy efektywność punktową

tego składnika dla dawki a jako:

$$(3) \quad \dot{Y}_{z_1=a} = \frac{\partial f(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_1} \Big|_{z_1=a, z_i=c_i \quad (i=2,3)}$$

Ogólnie efektywność i -tego składnika liczona w przedziale $\langle a, b \rangle$ zależy od:

- 1^o długości i położenia przedziału wartości tego składnika,
- 2^o wartości nadanych pozostałym składnikom.

Oprócz tego funkcja regresji plonów w zależności od nawożenia jest modyfikowana przez czynniki agrotechniczne i meteorologiczne takie jak:

- 1^o wilgotność, mierzona np. sumą opadów za okres wegetacji rośliny,
- 2^o zasobność gleby w składniki pokarmowe: azot, P_2O_5 , K_2O ,
- 3^o jakość stanowiska przeznaczonego pod uprawę - przedplon,
- 4^o kwasowość gleby,
- 5^o typ, rodzaj i klasa gleby,
- 6^o ogólny poziom kultury agrotechnicznej gospodarstwa,
- 7^o inne rodzaje nawożenia gleby (np. Ca, organiczne).

Analiza efektywności nawożenia NPK, prowadząca do określenia biologicznego i ekonomicznego optimum w różnych warunkach agrotechnicznych, powinna być oparta o model uwzględniający i te zmienne, tzn:

$$(4) \quad Y = f(Z, X)$$

gdzie

$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ - wektor zmiennych nawozowych

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ - wektor pewnej liczby zmiennych agrotechnicznych (nazwijmy je towarzyszącymi).

Ze względu na brak teoretycznych przesłanek a priori co do kształtu funkcji regresji (4) jedynym wyjściem jest aproksymacja jej przez funkcję wielomianową. Jeśli ograniczymy się do wielomianu stopnia drugiego, to funkcja regresji (4) przyjmie postać

$$(5) \quad Y = a_0 + f_1(Z) + f_2(X) + f_3(Z^T \cdot X)$$

lub explicite

$$Y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + b_{11} z_1^2 + 2b_{12} z_1 z_2 + \dots + b_{33} z_3^2 + c_1 x_1 + \dots + d_{kk} x_k^2 + g_{11} z_1 x_1 + \dots + g_{3k} z_3 x_k$$

Maksymalna liczba parametrów modelu (5) wynosi

$$1 + 3 + 6 + k + \frac{k(k+1)}{2} + 3k = 10 + (9k + k^2) \cdot \frac{1}{2}.$$

Eksperyment prowadzący do ocen parametrów modelu (5) musi spełniać dwa warunki:

1° $n > 10 + \frac{(9k + k^2)}{2}$ gdzie n jest liczbą punktów w przestrzeni zmiennych z_1 i x_r , w których należy dokonać pomiarów plonu Y .

2° macierz kowariancji V zmiennych: $z_1, x_r, z_1^2, x_r^2, z_1 x_r$ musi być nieosobliwa.

Warunek drugi oznacza, że w eksperymencie musi być uwzględniony odpowiedni zakres zmienności każdej ze zmiennych z_1, x_r (np. co najmniej 3 wartości dla zmiennych występujących w kwadratach) oraz odpowiednia liczba kombinacji tych wartości. Pożądane byłoby również, aby układ doświadczalny spełniał pewne warunki ortogonalności, zapewniające przynajmniej niezależność parametrów funkcji $f_1(Z)$ od $f_2(X)$ oraz warunek stałości informacji o wartości regresyjnej (tj. wariancji σ_Y^2) w pewnym obszarze należącym do dziedziny funkcji $f_1(Z)$ i zawierającym punkty optymalnego nawożenia.

Spełnienie tych warunków w ogólnym modelu nie jest możliwe. W przypadku zredukowania liczby zmiennych towarzyszących x_r do kilku dających się kontrolować, można spełnić prawie wszystkie z omówionych warunków planując układy rotatabilne stopnia drugiego dla wyznaczenia funkcji $f_1(Z)$, powtórzone tę samą liczbę razy przy każdej kombinacji wartości cech x_r (jeśli to ostatnie jest możliwe). Eliminacja zmiennych towarzyszących może następować bądź w drodze ustalenia ich wartości, bądź też prowadzenia doświadczeń w przekrojach odpowiadających poziomom odpowiednich czynników. Modelem układu doświadczalnego będzie model (5) poszerzony o składnik losowy e_j . Parametry modelu będą mogły być wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów. Przy założeniu, że:

1° zmienna Y ma rozkład normalny $N(f(Z, X), \sigma^2)$

2° składniki losowe obserwacji y_j są niezależne między sobą

3° błąd aproksymacji funkcji $f(Z, X)$ za pomocą modelu (5) jest mały względem błędu doświadczalnego, tzn.

$$\sigma_{\text{aprosk.}}^2 = \sigma_e^2 - \sigma^2 \approx 0$$

można dokonać testowania hipotez odnośnie istotności poszczególnych parametrów funkcji regresji (lub grup tych współczynników) na drodze analizy wariancji, jak również zbudować przedziały ufności dla wartości regresyjnych Y .

Rezygnując z warunków ortogonalności i stałości informacji o Y w wybranym obszarze, można do tego samego celu wykorzystać wyniki doświadczeń nawozowych już przeprowadzonych w różnych układach doświadczalnych ze zmiennym nawożeniem NPK. Takimi wynikami dysponuje Zakład Chemii Gleb i Nawożenia Roślin IUNG. Są to wyniki doświadczeń nawozowych z lat 1961 - 70 prowadzonych na terenie całej Polski, w których badano wysokie dawki NPK w różnych zestawieniach i kombinacjach.

W analizie tych danych przyjęto model:

$$(6) \quad y_j = a_0 + a_1 z_{1j} + a_2 z_{2j} + a_3 z_{3j} + b_{11} z_{1j}^2 + b_{12} z_{1j} z_{2j} + \dots + \\ + b_{33} z_{3j}^2 + c_1 x_{1j} + \dots + c_7 x_{7j} + g_{11} x_{1j} z_{1j} + \dots + \\ + g_{37} x_{7j} z_{3j} + e_j$$

gdzie

$z_1 = N$, $z_2 = P$, $z_3 = K$,

$x_1, x_2 =$ zmienne, którymi zakodowano wilgotność określoną w trzech stanach: duża, normalna, mała,

$x_3 = \text{pH}$,

$x_4 =$ zasobność gleby w P_2O_5 ,

$x_5 =$ " " w K_2O ,

$x_6 =$ zmienna dychotomiczna dla przedplonu (0 - dobry, 1 - zły),

$x_7 =$ poziom plonowania pola doświadczalnego przy standardowym nawożeniu.

Model ten przez podstawienie

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2, \quad u_3 = z_3, \quad u_4 = z_1^2, \quad \dots, \quad u_{37} = x_7 z_3$$

został sprowadzony do modelu regresji wielokrotnej liniowej z 37 zmiennymi niezależnymi

$$(7) \quad y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{37} b_i u_{ij} + e_j$$

Parametry b_i modelu (7) zostały wyznaczone w dwóch przekrojach:

1^o w przekroju regionalnym wyznaczono funkcje regresji w odpowiednich rejonach dla żyta, pszenicy ozimej, owsa, jęczmienia i ziemniaków,

2^o w przekroju wg żyzności gleby wyznaczono funkcję regresji dla kompleksu glebowego pszennego, żytńskiego średniego i dobrego, oraz żytńskiego słabego.

Istotność współczynników regresji sprawdzono testem t - Studenta posługując się statystyką

$$t_{\text{emp.}} = \frac{b_1}{s_{b_1}}$$

gdzie $s_{b_1} = \sqrt{s_e^2 \cdot v^{11}}$, v^{11} element na przekątnej macierzy V^{-1} .

Mimo formalnego sprowadzenia modelu kwadratowego (6) do modelu liniowego (7) interpretacja współczynników regresji b_1 jest dla tych modeli odmienna. Nie można np. współczynnika $b_1 = a_1$ traktować jak współczynnika cząstkowego, opisującego zmiany Y odpowiadające jednostkowej zmianie z_1 przy ustalonych wartościach innych zmiennych, gdyż ze zmianą z_1 zmienia się również z_1^2 lub $z_1 \cdot z_2$. Dlatego też do praktycznych celów i formułowania wniosków należy posługiwać się tabelarycznym przedstawieniem funkcji regresji lub jej pełnym równaniem. Zatem w pierwszym rzędzie zredukowano funkcję (6) do funkcji przekrojonych nadając zmiennym towarzyszącym pewne ustalone wartości, a mianowicie kombinowano różne wartości każdej z nich z przeciętnymi dla pozostałych, np.: (x_1, x_2) odpowiadające

- 1) wilgotności normalnej $x_3 = 6$, $x_4 = 7,5$, $x_5 = 12$, $x_6 = 1$, $x_7 = 25$
 - 2) " małej " " " " " "
 - 3) " dużej " " " " " "
 - 4) " normalnej $x_3 = 4,5$ " " " " "
- itd.

W ten sposób sprowadzono model (6) do kilkunastu funkcji typu

$$(8) \quad Y = a_0^{(p)} + f_1(Z)$$

przy czym w zależności od kombinacji wartości cech x_r zmieniają się parametry funkcji $f_1(Z)$. Następnie każda funkcja typu (8) została stabilizowana dla wszystkich kombinacji wartości składników nawozowych:

$$N = 30, 60, 90, 120$$

$$P = 36, 72, 108, 144$$

$$K = 40, 80, 120, 160$$

oraz wyliczone zostały średnie efektywności 30 kg N w tym samym układzie.

Wyznaczono również przekrój powierzchni regresji płaszczyzną prostopadłą do hiperpłaszczyzny $OZ_1Z_2Z_3$ wzdłuż prostych wyznaczo-

nych przez cztery stosunki $N : P : K$, a mianowicie

$$1^{\circ} \quad 1 : 0,8 : 1,2,$$

$$2^{\circ} \quad 1 : 1 : 2,$$

$$3^{\circ} \quad 1 : 1 : 1,5$$

$$4^{\circ} \quad 1 : 1,5 : 1,5.$$

Funkcje regresji wyznaczone tymi przekrojami pozwalają na wyznaczenie łącznego efektu wszystkich trzech składników nawozowych równocześnie przy określonym stosunku. Zostały one stabilizowane dla $N + P + K = 50$ i tak co 50 kg aż do 500 kg/ha.

Warto zauważyć, że przy pomocy funkcji regresji (8) można również znaleźć optymalny stosunek $N : P : K$ przy ustalonej sumie składników lub przy ustalonej wartości nawozu.

Przykład interpretacji

Uzyskane funkcje regresji $Y = f(Z, X)$ mogą służyć do prognozowania plonów roślin uprawnych w konkretnych warunkach siedliskowych i przyjętej prognozie warunków wilgotnościowych (X_1 constans).

Posłużymy się przykładem jednej z funkcji regresji opracowanej dla żyta. Aproksymację parametrów funkcji uzyskano z 3890 punktów empirycznych z nawożeniem mineralnym różnych odmian żyta z terenu całej Polski w latach 1961 - 1970. Stosowane dawki: $N \leq 90$; $P_{205} \leq 144$; $K_{20} \leq 240$ kg/ha.

Należy zaznaczyć, że schematy doświadczeń były bardzo różnorodne i nie przy wszystkich poziomach jednego składnika występowały pozostałe. I tak w omawianych doświadczeniach reprezentowane były dawki:

przy $P_{205} = 36$ kg/ha występowały dawki $0 \leq N \leq 60$ i $0 \leq K \leq 160$

" $P_{205} = 72$ " " " " $0 \leq N \leq 90$ i $0 \leq K \leq 240$

" $P_{205} = 108$ " " " " $60 \leq N \leq 90$ i $80 \leq K \leq 120$

" $P_{205} = 144$ " " " " $N = 60$ i $K = 160$

Najliczniejszą grupę stanowiły doświadczenia z kombinacją $N = 60$, $P = 70$, $K = 90$.

Tabulogramy wyników obliczeń wykonanych na EMC zawierały:

1^o wektor średnich,

2^o macierz kowariancji,

3^o macierz współczynników korelacji liniowej,

4^o wektor współczynników regresji b_1 i stałą regresji a_0 ,

5^o standardowy błąd oceny,

6^o błędy współczynników regresji,

- 7° współczynnik determinacji ($R^2 \cdot 100$) wielorakiej,
 8° współczynnik korelacji R wielorakiej,
 9° wartości t - Studenta (t_1 - empiryczne),
 10° a) tabelaryczne zestawienie równań regresji przekrojowych przy ustalonych wartościach zmiennych towarzyszących X_T ,
 b) tabelaryczne zestawienie oczekiwanych plonów Y przy ustalonych wartościach zmiennych z_1 (NPK),
 c) tabelaryczne zestawienie oczekiwanych efektów dawki N,
 d) tabelaryczne zestawienie oczekiwanych plonów Y przy ustalonych stosunkach $z_1 : z_2 : z_3$ (N : P : K) dla określonych wartości sum tych zmiennych (N + P + K) w przedziale (100, 500) co 50 kg/ha.

Funkcja prognozująca plony żyta przeciętnie dla całego kraju miała współczynnik determinacji $R^2 \cdot 100 = 77\%$, czyli uwzględnione 37 zmiennych (Z, X) łącznie wyjaśniały 77% zmienności plonów żyta. Analogiczne funkcje dla siedmiu rejonów miały współczynniki determinacji od 76% do 92% przy liczebnościach doświadczeń w poszczególnych rejonach od 165 do 1100.

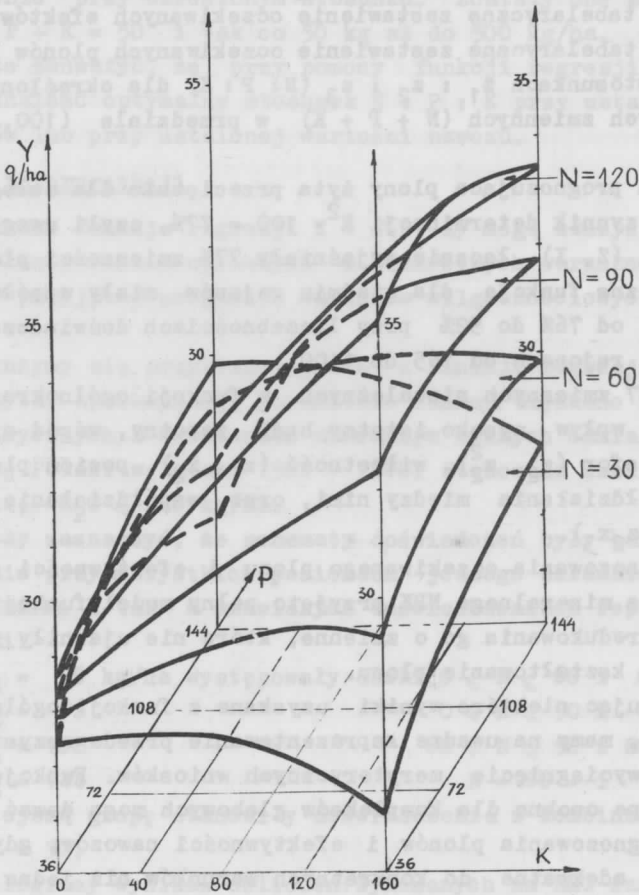
Wśród 37 zmiennych niezależnych w funkcji ogólnokrajowej 15 z nich miały wpływ wysoko istotny bądź istotny, wśród nich azot (z_1, z_1^2), fosfor (z_2, z_2^2), wilgotność (x_1, x_2), poziom plonowania (x_7) i współdziałania między nimi, oraz współdziałanie fosforu z pH gleby ($z_2 x_3$).

Do prognozowania oczekiwanego plonu i efektywności składników nawożenia mineralnego NPK przyjęto pełny model funkcji regresji (6) bez redukcji go o zmienne, które nie ujawniły istotnego wpływu na kształtowanie plonu.

Prezentując niektóre wyniki uzyskane z funkcji ogólnej, dla całego kraju, mamy na uwadze zaprezentowanie przede wszystkim metody, a nie wyciągnięcie merytorycznych wniosków. Funkcje regresji znalezione osobno dla kompleksów glebowych mogą dawać większą precyzję prognozowania plonów i efektywności nawozów, gdyż winny być bardziej adekwatne do konkretnych warunków niż jedna funkcja ogólna.

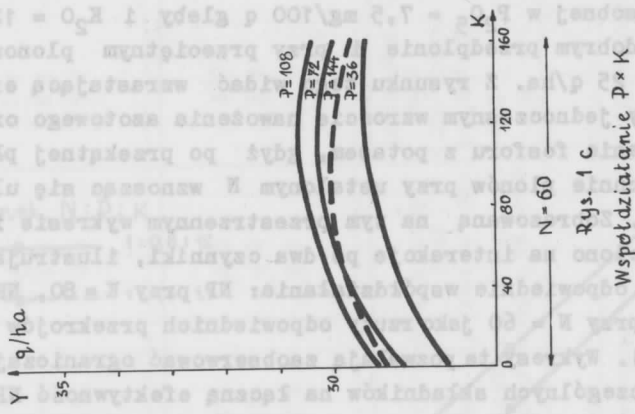
Na rys. 1 przedstawiono współdziałanie składników nawozowych NPK według funkcji przekrojowej o równaniu:

$$Y = 24,24 + 0,355 z_1 - 0,0061 z_1^2 + 0,7884 z_2 - 0,0245 z_2^2 + \\ - 0,0666 z_3 - 0,0107 z_3^2 - 0,0398 z_1 z_2 + 0,0564 z_1 z_3 - 0,0028 z_2 z_3$$

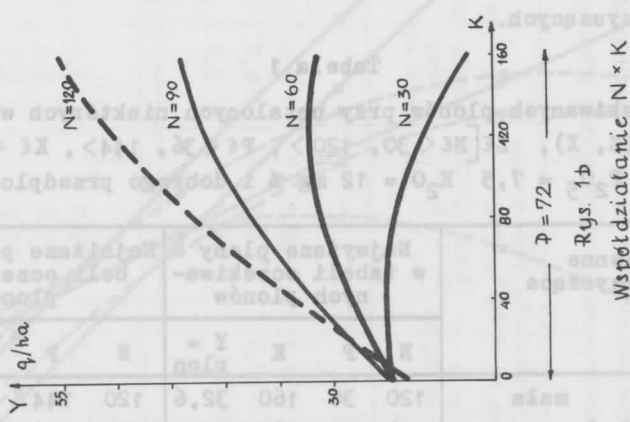


Rys. 1

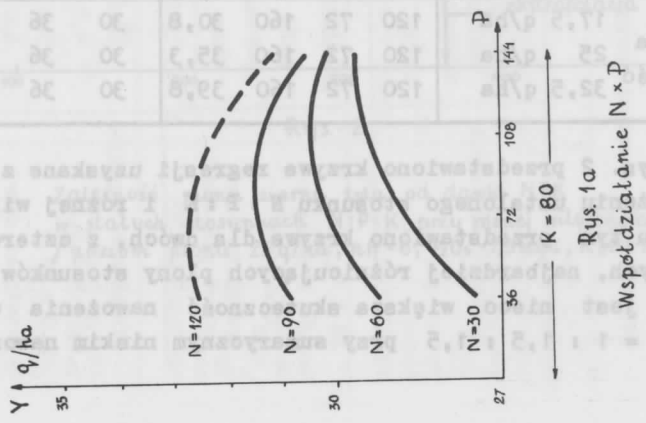
Powierzchnie plonów
obrazujące współdziałanie NPK



Rys. 1 c
Wspoldziahanie $P \times K$



Rys. 1 b
Wspoldziahanie $N \times K$



Rys. 1 a
Wspoldziahanie $N \times P$

w warunkach wilgotnościowych normalnych, na glebie o kwasowości $pH = 6$, zasobnej w $P_2O_5 = 7,5$ mg/100 q gleby i $K_2O = 12$ mg/100 q gleby, na dobrym przedplonie i przy przeciętnym plonowaniu pola wynoszącym 25 q/ha. Z rysunku tego widać wzrastającą efektywność potasu przy jednoczesnym wzroście nawożenia azotowego oraz ujemne współdziałanie fosforu z potasem, gdyż po przekątnej płaszczyzny PK powierzchnie plonów przy ustalonym N wznosząc się ulegają zakrzywieniu. Zobrazowaną na tym przestrzennym wykresie interakcję NPK rozdzielono na interakcje po dwa czynniki, ilustrując na rys. 1a, 1b, 1c odpowiednie współdziałania: NP przy $K = 80$, NK przy $P = 72$ i PK przy $N = 60$ jako rzuty odpowiednich przekrojów powierzchni z rys. 1. Wykresy te pozwalają zaobserwować ograniczające działanie poszczególnych składników na łączną efektywność NPK.

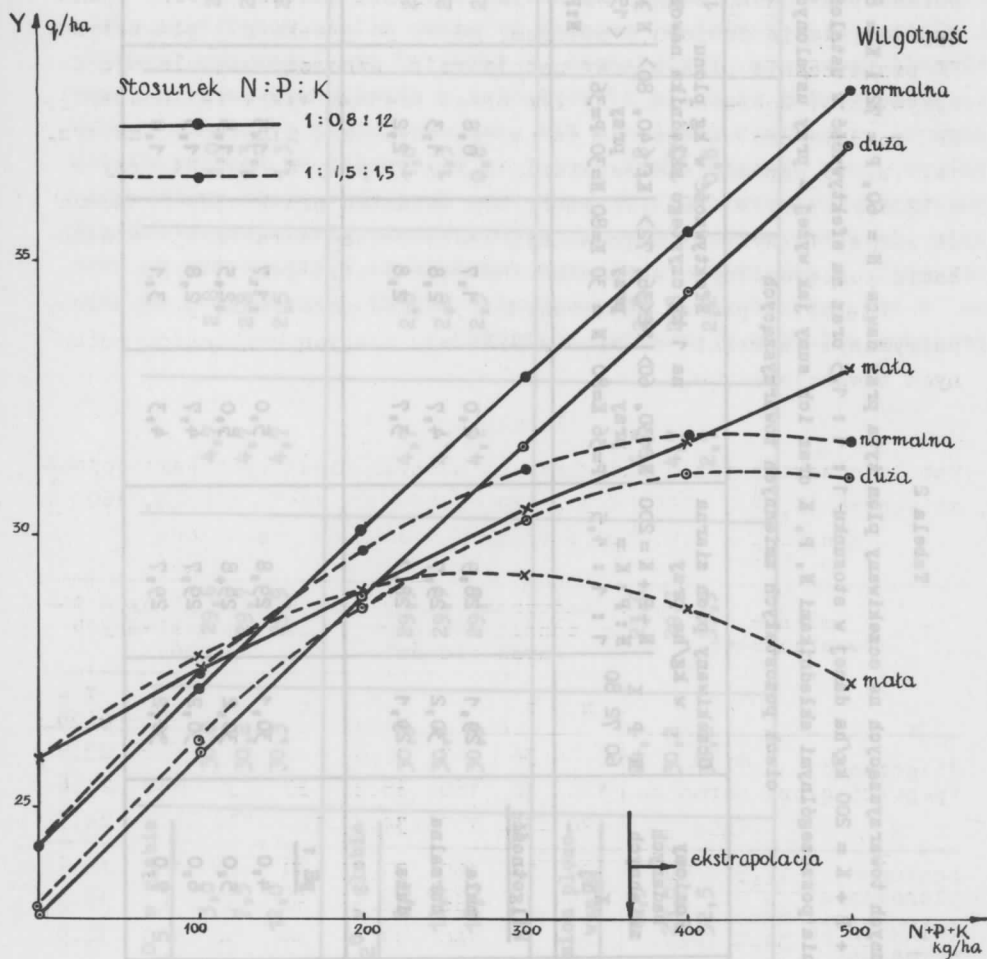
W tabeli 1 podano najniższe i najwyższe oczekiwane plony w rozpatrywanym zakresie nawożenia NPK dla pewnych kombinacji zmiennych towarzyszących.

Tabela 1

Tabela oczekiwanych plonów przy ustalonych niektórych wartościach zmiennych (Z, X), $Z \in [N \in < 30, 120 >, P \in < 36, 144 >, K \in < 0, 160 >]$ dla $P_2O_5 = 7,5$ $K_2O = 12$ mg % i dobrego przedplonu

Zmienne towarzyszące		Najwyższe plony w tabeli oczekiwanych plonów				Najniższe plony w tabeli oczekiwanych plonów			
		N	P	K	Y = plon	N	P	K	Y = plon
wilgotność (p.p. 25 q/ha)	mała	120	36	160	32,6	120	144	0	23,9
	normalna	120	72	160	35,3	30	36	160	21,6
	duża	120	72	160	34,3	120	144	0	24,7
poziom plonowania (wilgotność normalna)	17,5 q/ha	120	72	160	30,8	30	36	160	19,7
	25 q/ha	120	72	160	35,3	30	36	160	26,1
	32,5 q/ha	120	72	160	39,8	30	36	160	32,5

Na rys. 2 przedstawiono krzywe regresji uzyskane z przekroju przy założeniu ustalonego stosunku N : P : K i różnej wilgotności. Na rysunku tym przedstawiono krzywe dla dwóch, z czterech stabularyzowanych, najbardziej różnicujących plony stosunków N : P : K. Widoczna jest nieco większa skuteczność nawożenia w stosunku N : P : K = 1 : 1,5 : 1,5 przy sumarycznym niskim nawożeniu, na-



Rys. 2

Zależność plonu ziarna żyta od dawki NPK w stałych stosunkach N:P:K przy różnej wilgotności / poziom plonu 25 q/ha, pH=6, P₂O₅=7,5 mg%, K₂O=12 mg% /

Tabela 2

Wpływ zmiennych towarzyszących na oczekiwany plon żyta przy dawce $N = 60$, $P = 72$ i $K = 80$ i przy dawce $N + P + K = 200$ kg/ha danej w stosunku 1 : 1 : 1,5 oraz na efektywność w ustalonych przedziałach nawożenia poszczególnymi składnikami N, P, K oraz ich sumy jak wyżej - przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych towarzyszących

Ustalone wartości zmiennych X_1	Poziomy badanych zmiennych X_{ij}	Oczekiwany plon ziarna w kg/ha przy		Efektywność w kg plonu na 1 kg czystego składnika nawozu				
		N 60	P 72	K 80	$N + P + K = 200$ N : P : K = 1 : 1 : 1,5	$NE < 30, 60 >$ przy P = 36 K = 80	$PE < 36, 72 >$ przy N = 30 K = 80	$N + P + KE < 150, 200 >$ przy N : P : K = 1 : 1 : 1,5
pH = 6								
$P_{2,5} = 7,5$		29,1			2,0	1,7	0,8	1,4
$K_{2,0} = 12,0$		30,2			4,7	2,8	1,3	2,4
przedplon dobry poziom plonowania 25 q/ha		29,1			3,7	2,8	2,2	2,8
	<u>Wilgotność:</u>							
	mała							
	normalna							
	duża							
	<u>pH:</u>							
wilgotność normalna								
$P_{2,5} = 7,5$	4,0	30,1			5,0	1,7	1,5	2,6
$K_{2,0} = 12,0$	5,0	30,2			5,0	2,5	1,5	2,6
przedplon dobry poziom plonowania 25 q/ha	6,0	30,2			4,7	2,8	1,3	2,4
	7,0	30,2			4,3	3,1	1,0	2,6

wilgotność nor- malna $pH = 6,0$ $K_2O = 12,0$ przedplon dobry poziom plonowania 25 q/ha	$P_{2,5}$ w glebie <hr/> 3,0 7,5 12,0	30,0 30,2 30,3	29,6 29,7 29,9	4,7 4,7 4,7	2,8 2,8 2,5	1,0 1,3 1,3	2,5 2,4 2,6	
	wilgotność nor- malna $pH = 6,0$ $P_{2,5} = 7,5$ przedplon dobry poziom plonowania 25 q/ha	K_2O w glebie <hr/> 6,0 12,0 18,0	30,3 30,2 30,3	29,9 29,7 29,6	4,7 4,7 4,7	2,8 2,8 2,5	1,0 1,3 0,8	2,5 2,4 2,6
		wilgotność nor- malna $pH = 6,0$ $P_{2,5} = 7,5$ $K_2O = 12,0$ przedplon dobry poziom plonowania 25 q/ha	poziom plono- wania <hr/> 17,5 25,0 32,5	24,1 30,2 36,2	23,6 29,7 35,9	6,7 4,7 2,7	2,8 2,8 2,2	1,8 1,3 0,8

